

מבוא למתמטיקה לכלכליים

פרק 6 - וקטורים גיאומטריים

תוכן העניינים

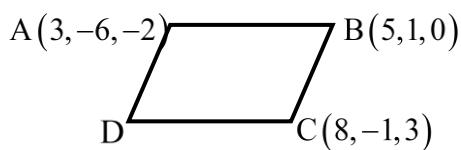
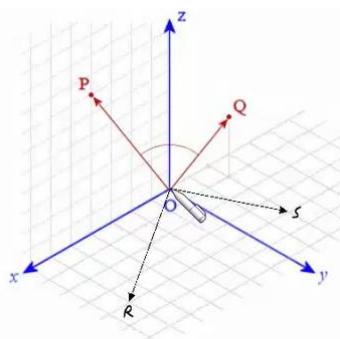
1
1. וקטורים

וקטורים

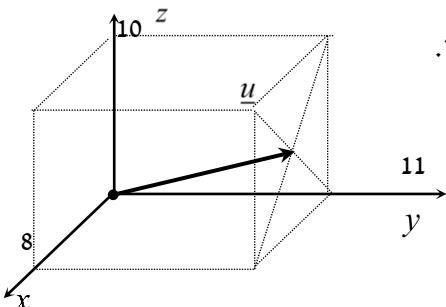
הערת סימון: נסמן את הווקטור \underline{u} כך \underline{u} . סימונים מקובלים נוספים הם: $\underline{v}, \underline{w}$, את גודל הווקטור \underline{u} נסמן כך $|u|$. סימון מקובל נוספת הוא $\|\underline{u}\|$. גודל וקטור נקרא גם אורך הווקטור וגם הנורמה של הווקטור.

שאלות

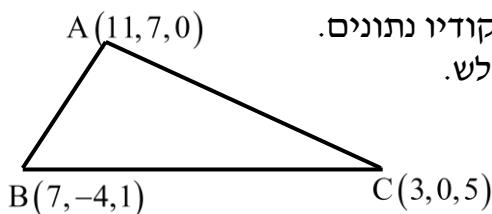
- 1) רשמו את נוסחת כל אחד מהווקטורים $\vec{S}, \vec{Q}, \vec{R}, \vec{P}$ שבאיור.
הנימו שאורך ורוחב כל משਬצת באיזור הוא יחידה אחת.



- 2) בشرطוט הבא נתונה מקבילית,
ששיעוריה שלושה מקדוקדיות נתוניות.
מצאו את שיעורי הקדקוד D.
רמז: היעזר בנוסחת אמצע קטע.



- 3) נתונה תיבה שמידותיה מצוינות במערכת הצירים.
מצאו מהו הווקטור \underline{u} על פי הشرطוט.



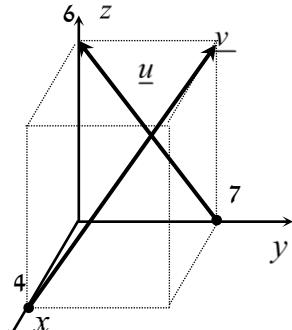
- 4) בشرطוט הבא נתון משולש שישוריו קדוקדיות נתוניות.
מצאו את שיעורי מפגש התיכונים במשולש.

(5) ענו על הסעיפים הבאים (אין קשר בין הסעיפים):

א. מצאו את הווקטור \vec{EF} , אם נתונות הנקודות $E(2,0,-3)$ ו- $F(7,-1,-3)$.

ב. מצאו את שיעורי הנקודה N , אם נתונה הנקודה $M(0,-4,1)$

$$\overrightarrow{MN} = (-1, -1, 9)$$



(6) נתונה תיבה שמידותיה מצוינות במערכת הצירים שלפניך.

מצאו מהו הווקטור \underline{u} ומהו הווקטור \underline{v} .

(7) מצאו את x , y ו- z , אם נתון $\underline{u} = \underline{y} - \underline{x}$, כאשר $\underline{u} = (4, -1, 2)$

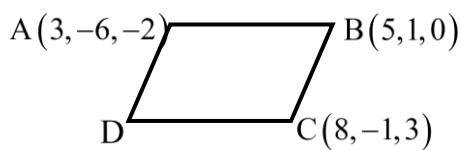
$$\underline{y} = (z-2, y+1, x-3)$$

(8) נתונות הנקודות הבאות:

. $A(1,0,2)$, $B(3,7,-4)$, $C(6,9,0)$, $D(7,4,10)$, $E(9,11,4)$

א. הראו כי: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DE}$

ב. האם ניתן לומר כי גם $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$? נמק.



(9) בשרטוט נתונה מקבילית, ששיעוריה שלושה מקדוקדיות נתונים.

מצאו את שיעורי הקודקוד D .

* אין להיעזר בפתרון בנוסחת אמצע קטע.

. $\underline{w} = (2, 6, -5)$, $\underline{v} = (4, -2, -6)$, $\underline{u} = (-3, 1, 4)$

* בשאלות 13, 14, 16 הסבירו את משמעות התוצאות מבחינה גיאומטרית.

(10) חשבו :

$$3\underline{u} - 2\underline{v} \quad \text{א.} \quad -0.5\underline{v} \quad \text{ב.} \quad 2\underline{u} \quad \text{ג.}$$

(11) חשבו :

$$\underline{v} - 0.5\underline{u} + 2\underline{w} \quad \text{ב.} \quad 0.25\underline{v} - 0.5\underline{u} \quad \text{ג.}$$

$$2\underline{v} - \underline{u} + 4\underline{w} \quad (12)$$

$$\underline{u} / |\underline{u}| \quad (13)$$

$$d(\underline{u}, \underline{v}) \quad (14)$$

$$\underline{v} \cdot \underline{u} + 2\underline{w} \cdot \underline{v} \quad (15)$$

$$\text{proj}(\underline{u}, \underline{v}) \quad (16)$$

בשאלות 19-17 נתונות הנקודות : C(3, -1, 2), B(4, 2, -1), A(1, -3, 0) ויש למצוא את הווקטורים :

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \quad (17)$$

$$2\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{AB} \quad (18)$$

$$2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} \quad (19)$$

(20) נתונים ארבעת קדקודיו המרובע ABCD : A(-4, 2, 1), B(0, 2, -1), C(-3, -5, 0), D(-7, -5, 2)

הוכיחו כי המרובע הוא מקבילית.

21) נתונים ארבעת קודדי המרובע : $ABCD$

$$\text{. } A(1,2,0) , B(-2,5,3) , C(-1,8,4) , D(4,3,-1)$$

א. הוכיחו כי המרובע הוא טרפז.

ב. האם הטרפז שווה שוקיים?

22) חשבו את הזווית שבין הווקטורים \underline{u} ו- \underline{v} , כאשר :

$$\underline{u} = (-2, 2, 5) , \underline{v} = (4, 0, 1) \text{ א.}$$

$$\underline{u} = (6, -3, 1) , \underline{v} = (2, 5, 3) \text{ ב.}$$

$$\underline{u} = (-2, 1, 3) , \underline{v} = (4, -2, -6) \text{ ג.}$$

23) מצאו את שטחו של מושלש ABC , שקודדיו הם :

$$\text{. } A(-3, 2, 1) , B(0, 3, 2) , C(5, -1, 0)$$

24) נתונים הווקטורים : $\underline{u} = (2, -1, 0) , \underline{v} = (5, 0, 3)$.

מצאו וקטור \underline{w} , שמכפלתו ב- \underline{u} היא 0 ומכפלתו ב- \underline{v} היא 0, אם ידוע שגודלו הוא $\sqrt{70}$.

25) מצאו וקטור שמאונך לשני הווקטורים $(1, -1, 2), (3, 2, 1)$

ושمرחקו מהווקטור $(1, 1, 0)$ הוא $\sqrt{3}$.

26) ענו על שני הסעיפים הבאים :

א. הוכיחו כי $|u + v| = |u| + |v| \Leftrightarrow u \perp v$.

הסבירו מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו במישור.

ב. הוכיחו כי $|u + v|^2 = |u|^2 + |v|^2 \Leftrightarrow u \perp v$.

הסבירו מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו במישור.

27) ענו על חמישה הסעיפים הבאים :

א. הוכיחו כי $|u + v|^2 = |u|^2 + 2u \cdot v + |v|^2$.

ב. הוכיחו כי $|u - v|^2 = |u|^2 - 2u \cdot v + |v|^2$.

ג. הוכיחו כי $|u - v|^2 = |u|^2 - 2u \cdot v + |v|^2$.

ד. הוכיחו כי $|u + v|^2 + |u - v|^2 = 2|u|^2 + 2|v|^2$.

תנו פירוש גיאומטרי לוצאה במישור.

ה. הוכיחו כי $v \cdot u = \frac{1}{4}(|u + v|^2 - |u - v|^2)$.

(28) יהיו $u, v \in \mathbb{R}^n$ וקטוריים שונים מ-0, אורתוגונליים זה לזה ובuali אותה נורמה.

$$\text{נגיד } a = u - 2v, b = 3u + v$$

אם α היא הזווית בין a ל- b , אז $\alpha \cos$ שווה?-?

(29) יהיו $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^n$ וקטוריים שונים מ-0, אורתוגונליים זה לזה ובuali אותה נורמה k .

$$\text{יהי } v = \alpha w_1 + \frac{3}{4} w_2 \text{ שווה למרחקו מ-} w_1.$$

מהו המרחק של v מ- w_1 ?

(30) יהיו $u, v \in \mathbb{R}^n$ וקטורי ייחידה המקיים $2\|u - v\| = \|u\| + \|v\|$.
הוכחו ש- u ו- v הם בכרח כפולות סקלר אחד של השני.

תשובות סופיות

$\vec{P} = (4, 0, 7), \quad \vec{Q} = (-2, 1, 3), \quad \vec{R} = (6, 4, 0), \quad \vec{S} = (-2, 4, 0) \quad \text{(1)}$

$D = (6, -8, 1) \quad \text{(2)}$

$\underline{u} = (4, 11, 5) \quad \text{(3)}$

$M = (7, 1, 2) \quad \text{(4)}$

$N = (-1, -5, 10) \quad \text{ב.} \quad \overrightarrow{EF} = (5, -1, 0) \quad \text{א.} \quad \text{(5)}$

$\underline{u} = (0, -7, 6), \quad \underline{v} = (-4, 7, 6) \quad \text{(6)}$

$z = 6, \quad y = -2, \quad x = 5 \quad \text{א.} \quad \text{(7)}$

. ב. לא.

(8) א. הוכחה.

$D = (6, -8, 1) \quad \text{(9)}$

$(-17, 7, 24) \quad \text{ג.} \quad (-2, 1, 3) \quad \text{ב.} \quad (-6, 2, 8) \quad \text{א.} \quad \text{(10)}$

$(9.5, 9.5, -18) \quad \text{ב.} \quad (2.5, -1, -3.5) \quad \text{א.} \quad \text{(11)}$

$(19, 19, -36) \quad \text{(12)}$

$\left(\frac{-3}{\sqrt{20}}, \frac{1}{\sqrt{20}}, \frac{4}{\sqrt{20}} \right) \quad \text{(13)}$

$\sqrt{158} \quad \text{(14)}$

$14 \quad \text{(15)}$

$\underline{u}^* \quad \text{(16)}$

$(5, 7, 1) \quad \text{(17)}$

$(-8, -16, 8) \quad \text{(18)}$

$(8, 12, 0) \quad \text{(19)}$

(20) שאלת הוכחה.

(21) א. שאלת הוכחה.

ב. כן.

$\alpha = 180^\circ \quad \text{ג.} \quad \alpha = 90^\circ \quad \text{ב.} \quad \alpha = 97.277^\circ \quad \text{א.} \quad \text{(22)}$

$S_{\Delta ABC} = 10.173 \quad \text{(23)}$

$(-3, -6, 5) \quad \text{(24)}$

$v = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \text{ or } v = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad \text{(25)}$

(26) שאלת הוכחה.

(27) שאלת הוכחה.

$\frac{1}{\sqrt{50}} \quad \text{(28)}$

$$\frac{5}{4}k \quad (29)$$

(30) שאלת הוכחה.